Μάθημα 4ο 04/11/15

① $(X, Y) = $ (αριθμ. {•}, αριθμ. {:}) σε μια ρίψη 2 ζαριών

$Y \backslash X$	0	1	2	καταν. Y
0	16/36	8/36	1/36	25/36
1	8/36	2/36	0	10/36
2	1/36	0	0	1/36
καταν. X	25/36	10/36	1/36	1

$P_{X|Y}(0|0) = 16/25$
$P_{X|Y}(1|0) = 5/25$
$P_{X|Y}(2|0) = 1/25$

$X|Y \sim B(n-y,\ p_x/(1-p_y)) \equiv B(2-y,\ 1/5) \equiv B(2,\ 1/5)$

$(X, Y) \sim M(n=2,\ p_x = 1/6,\ p_y = 1/6)$
$X \sim B(n=2,\ p = p_x = 1/6)$

Μαθηματική Ελπίδα.

$\underset{\sim}{X} = (X_1, \dots, X_n)$ διακριτό τ.δ. με σ.π. $P_{\underset{\sim}{X}}(\underset{\sim}{x})$ και $Y = h(\underset{\sim}{X})$ συνάρτηση των τ.δ. $\underset{\sim}{X}$ δηλ. τ.μ.

$$\mu_{h(\underset{\sim}{X})} = E[h(\underset{\sim}{X})] = \sum_{x_1} \cdots \sum_{x_n} h(x_1, \dots, x_n) P_{\underset{\sim}{X}}(x_1, \dots, x_n)$$

$\underset{\sim}{X} = (X_1, \dots, X_n)$ συνεχές τ.δ. με σ.π.π. $f_{\underset{\sim}{X}}(\underset{\sim}{x})$ και $Y = h(\underset{\sim}{X})$ τ.μ. συνάρτηση του τ.δ. $\underset{\sim}{X}$

$$\mu_{h(\underset{\sim}{X})} = E[h(\underset{\sim}{X})] = \int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty} h(x_1, \dots, x_n) f_{\underset{\sim}{X}}(x_1, \dots, x_n)\, dx_1 \dots dx_n.$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ: Τα X_i, X_i^k, $(X_i - E(X_i))^2$ συναρτήσεις των $X_1, \dots, X_n$, Δηλαδή
$(X_1, X_2) \sim f\ (x_1, x_2)$

$X_1 = h(X_1, X_2)$, $(X_1 - EX_1)^2 = h(X_1, X_2)$

$$E(X_1) = \int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int x_1 f_{X_1,X_2}(x_1,x_2)\, dx_2 dx_1 = \int_{-\infty}^{\infty} x_1 \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} f_{X_1,X_2}(x_1,x_2)\, dx_2}_{f_{X_1}(x_1)} dx_1.$$

$$Var(X_1) = E(X_1 - EX_1)^2 = \int_{-\infty}^{\infty} \int (X_1 - EX_1)^2 f_{X_1,X_2}(x_1,x_2)\, dx_2\, dx_1 = \int_{-\infty}^{\infty} (X_1 - EX_1)^2 f_{X_1}(x_1)\, dx_1$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1:

$$E(X) = \sum_x \sum_y x\, p_{X,Y} = \sum_x x \sum_y p_{X,Y} = 1 \cdot \frac{25}{36} + 1 \cdot \frac{10}{36} + 2 \cdot \frac{1}{36} = \frac{1}{3}.$$

$$E(X+Y) = \sum_x \sum_y (x+y)\, p_{X,Y} = (0+0)\, P(0,0) + (0+1)\, P(0,1) + \cdots + (1+1) \cdot P(1,1) + \cdots = \frac{2}{3} = EX+$$

$$E(X \cdot Y) = \sum_x \sum_y (x \cdot y)\, p_{X,Y} = (0 \cdot 0) P(0,0) + (0 \cdot 1) P(0,1) + \cdots + (1 \cdot 1) P(1,1) + \cdots = \frac{1}{18} \neq$$

$$\left(\neq EXEY = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{9}\right)$$

$X \sim B(2, 1/6)$, $EX = 2 \cdot 1/6$, $EY = 2 \cdot 1/6$.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 2: $(X, Y) \sim f_{X,Y}(x,y) = x + y$, $0 < x, y < 1$

$X \sim f_X(x) = x + \frac{1}{2}$

$$EX = \int_0^1 x(x + 1/2)\, dx = 7/12 = EY$$

$$E(X+Y) = \int_0^1 \int_0^1 (x+y)(x+y)\, dx dy = \frac{7}{6} \left(= EX + EY\right)$$

$$E(X \cdot Y) = \int_0^1 \int_0^1 x \cdot y \cdot (x+y)\, dx dy = \frac{1}{3} \left(\neq EX \cdot EY = \frac{7}{12} \cdot \frac{7}{12}\right)$$

$$E\left[a_0 + \sum_{i=1}^{n} a_i h_i(\underline{X})\right] = a_0 + \sum_{i=1}^{n} a_i E h_i(\underline{X})$$

$$Var\left[a h(\underline{X}) + b\right] = a^2 \cdot Var\, h(\underline{X})$$

Συνδιακύμανση για τις τ.μ. X, Y: $Cov(X,Y) = E[(X-EX)(Y-EY)] = E(XY) - EXEY = \sigma_{xy}$

Συντελεστής συσχέτισης για τις τ.μ. X, Y: $\rho = \rho_{X,Y} = \rho(X,Y) = \dfrac{Cov(X,Y)}{\sqrt{VarX, VarY}} = \dfrac{\sigma_{xy}}{\sqrt{\sigma_x^2 \sigma_y^2}}$

$$= \frac{\sigma_{xy}}{\sigma_x \cdot \sigma_y}$$

ΠΡΟΤΑΣΗ 1: Αν για τ.μ. X, $EX^2 = 0$ τότε $P(X=0) = 1$

ΠΡΟΤΑΣΗ 2 (Cauchy-Schwarz): Αν u, v τ.μ. με $Eu^2 < \infty$, $Ev^2 < \infty$, τότε:
$[E(uv)]^2 \underset{\circledast}{\leq} (Eu^2)(Ev^2)$, με ισότητα ανν $P(v = cu) = 1$, c σταθερά

ΑΠΟΔΕΙΞΗ 2: Έστω $h(t) = E(tu - v)^2 = (Eu^2)t^2 - 2[E(uv)]t + Ev^2 \geq 0$, $\forall t \in \mathbb{R}$
άρα $\underset{(\beta^2 - 4a\gamma)}{\Delta \leq 0}$ δηλ. $4[E(uv)]^2 \leq 4Eu^2 Ev^2$ δηλ. η ανισότητα.

Αν ισότητα, τότε $\Delta = 0$, δηλ. $\exists t_0 : h(t_0) = 0$ άρα $E(t_0 u - v)^2 = 0$, δηλ. $P(v = t_0 u) = 1$
από ΠΡΟΤΑΣΗ 1.

$t_0 = -\dfrac{\beta}{2a} = \dfrac{\cancel{2}E(uv)}{\cancel{2}Eu^2}$

Όταν $P(v = cu) = 1 \rightsquigarrow$ αμέσως η ισότητα.

$\circledast$ $[E(cu^2)]^2 = (Eu^2)(Ec^2u^2)$

ΠΡΟΤΑΣΗ 3: Έστω X, Y τ.μ. με $\mu_x = EX$, $\mu_y = EY$, $\sigma_x^2 = VarX$, $\sigma_y^2 = VarY$
Τότε, $\rho^2 \leq 1$ με ισότητα μόνο αν η μια είναι γραμμική συνάρτηση της άλλης
και ειδικότερα: $\rho = 1 \Leftrightarrow Y = \mu_y + \dfrac{\sigma_y}{\sigma_x}(X - \mu_x)$ και

$$\rho = -1 \Leftrightarrow Y = \mu_y - \frac{\sigma_y}{\sigma_x}(X - \mu_x).$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ 3: Cauchy-Schwarz με $u = X - \mu_x$ και $v = Y - \mu_y$.

$\dfrac{[E(X-\mu_x)(Y-\mu_y)]^2}{E(X-\mu_x)^2 E(Y-\mu_y)^2} \leq 1 \rightarrow \rho^2 \leq 1.$

Όταν $\rho^2 = 1 \rightarrow [E(uv)]^2 = Eu^2 Ev^2 \rightarrow \Delta = 0 \rightarrow P(v = t_0 \cdot u) = 1$

με $t_0 = \frac{Euv}{Eu^2} = \frac{E(X-\mu_x)(Y-\mu_y)}{E(X-\mu_x)^2} = \frac{\sigma_{xy}}{\sigma_x^2}$ $\boxed{\rho=1 \to \sigma_{xy}=\sigma_x\sigma_y}$

Ειδικότερα: αν $\rho=1 \to \sigma_{xy}=\sigma_x\sigma_y$ δηλ. $t_0 = \frac{\cancel{\sigma_x}\sigma_y}{\sigma_x^{\cancel{2}}} = \frac{\sigma_y}{\sigma_x} \to$

$Y-\mu_y = \frac{\sigma_y}{\sigma_x}(X-\mu_x)$.

Ροπές

$\underset{\sim}{X} = (X_1, \dots, X_n)$ n-διάστατη τ.μ.

1) Η από κοινού απλή (ή περί το μηδέν) ροπή $k_1 \dots k_n$ τάξης:

$\mu_{k_1 \dots k_n} = E(X_1^{k_1} \cdots X_n^{k_n})$

2) Η από κοινού κεντρική (ή περί τις μέσες τιμές) ροπή $k_1 \dots k_n$ τάξης:

$\lambda_{k_1 \dots k_n} = E[(X_1-\mu_1)^{k_1} \cdots (X_n-\mu_n)^{k_n}]$

3) Η από κοινού τυπική ροπή $k_1 \dots k_n$ τάξης

$\alpha_{k_1 \dots k_n} = E\left[\left(\frac{X_1-\mu_1}{\sigma_1}\right)^{k_1} \cdots \left(\frac{X_n-\mu_n}{\sigma_n}\right)^{k_n}\right]$

$$\Sigma = (\sigma_{ij})_{n\times n} = \begin{pmatrix} Var(X_1) & Cov(X_1,X_2) & \cdots & Cov(X_1,X_n) \\ Cov(X_2,X_1) & VarX_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & Var(X_n) \end{pmatrix}$$

$Cov(X,X) = EX^2 - (EX)^2 = VarX$.

$\rho(X,X) = \frac{VarX}{\sqrt{VarX \cdot VarX}} = 1$

Δεσμευμένη ή υπο συνθήκες μαθηματική ελπίδα

(X,Y) δισδιάστατη τ.μ. και $h(X,Y)$ τ.μ. συνάρτηση των X, Y

Η δεσμευμένη μαθηματική ελπίδα της $h(X,Y)$ δοθέντος ότι $X=x$.

$E[h(X,Y)|X=x] = \sum_y h(x,y) P_{Y|X}(y|x)$ για διακριτή (X,Y) τ.μ.

$= \int_{-\infty}^{\infty} h(x,y) f_{Y|X}(y|x)dy$ για συνεχή (X,Y) τ.μ.

Ειδικότερα για $h(X,Y)=Y$, $E[Y|X=x]=\sum_y y\, P_{Y|X}(y|x)$ για διακριτή τ.μ.

$$= \int_{-\infty}^{\infty} y\, f_{Y|X}(y|x)\, dy \text{ για συνεχή τ.μ.}$$

Γενικότερα: $(X_1,\dots,X_n,Y_1,\dots,Y_n) \sim f_{X_1,\dots,Y_n}(x_1,\dots,y_n)$

$$E[h(X_1,\dots,X_n,Y_1,\dots,Y_n)|X_1=x_1,\dots,X_n=x_n] = \underset{\uparrow\, y_n}{\int_{-\infty}^{\infty}} \cdots \underset{\uparrow\, y_1}{\int_{-\infty}^{\infty}} h(x_1,\dots,y_n) f_{Y_1,\dots,Y_n|X_1,\dots,X_n}(y_1,\dots,y_n|x_1,\dots,x_n)\, dy_1 \cdots dy_n$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1: Ζάρια.

$X|Y=0 \rightarrow$ Τιμές και πιθανότητες

$$E(X|Y=0)=\sum_x x\, P_{X|Y}(x|y=0) = 0\cdot\frac{16}{25} + 1\cdot\frac{8}{25} + 2\cdot\frac{1}{25} = \frac{2}{5}.$$

ή $E(X|Y=0)=n\cdot p = 2\cdot\frac{1}{5}$ από $X|Y=0 \sim B(2,\frac{1}{5})$

$X|Y \sim B(2-y,\frac{1}{5})$ Δηλ. $E(X|Y)=(2-y)\cdot\frac{1}{5}$.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 2: $f_{X|Y}(x|y)=3x$ $\quad, 0<y<x<1$.

$$f_{X|Y}(x|y)=\frac{2x}{1-y^2},\ 0<y<x<1.$$

$$E(X|Y)=\int_y^1 x\frac{2x}{1-y^2}\,dx = \frac{2}{3}\,\frac{1-y^3}{1-y^2},\ 0<y<1$$

Δεσμευμένη ή υπό συνθήκες διασπορά

Αν $h(X,Y)=[Y-E(Y|X)]^2$ τότε παίρνουμε από $E[h(X,Y)|X]$ την δεσμευμένη διασπορά που συμβολίζεται με $Var(Y|X)$ ή $\sigma^2_{Y|X}$ και δίνεται από τη σχέση: $Var(Y|X)=E(Y^2|X=x)-[E(Y|X)]^2$

ΠΡΟΤΑΣΗ 1: (X,Y) διδιάστατη τ.μ., τότε: $EY=E[E(Y|X)]$ και γενικότερα:

$E[h(X,Y)|X]$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ:

$$\underbrace{E[E[h(X,Y)|X]]}_{\text{συνάρτηση της } X} = \int_{-\infty}^{\infty} E[h(X,Y)|X] f_X(x)dx = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} h(x,y) f_{Y|X}(y|x)dy\, f_X(x)dx =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} h(x,y) \underbrace{\boxed{f_{Y|X}(y|x) f_X(x)}}_{f_{X,Y}(x,y)} dxdy = E[h(X,Y)]$$

ΠΡΟΤΑΣΗ 2: $Var(Y) = E[Var(Y|X)] + Var[E(Y|X)]$ και γενικότερα:
$Var[h(X,Y)] = E[Var[h(X,Y)|X]] + Var[E[h(X,Y)|X]]$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ:

$$\left.\begin{aligned} E[Var(Y|X)] &= E\{E(Y^2|X)\} - E\{[E(Y|X)]^2\} = EY^2 - E\{[E(Y|X)]^2\} \\ Var[E(Y|X)] &= E\{[E(Y|X)]^2\} - \{E[E(Y|X)]\}^2 = E\{[E(Y|X)]^2\} - [E(Y)]^2 \end{aligned}\right\} \overset{+}{\Rightarrow}$$

$\Rightarrow E(Y^2) - [E(Y)]^2 = Var Y$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 2 (συνέχεια): $f_X(x) = 3x^2, \quad 0<x<1$ | $f_Y(y) = \frac{3}{2}(1-y^2), \quad 0<y<1.$

$E(X) = \int_0^1 x \cdot 3x^2 dx = \frac{3}{4}$

$$EX^2 = E[E(X|Y)] = \int_0^1 \frac{2}{3}\frac{1-y^3}{1-y^2} f_Y(y)dy = \int_0^1 \frac{2}{3}\frac{1-y^3}{1-y^2}\cdot\frac{3}{2}(1-y^2)dy = \frac{3}{4} = EX.$$

ΠΡΟΤΑΣΗ 3: (X,Y,Z) τρισδιάστατη τ.μ., τότε: $Cov(X,Y) = E[Cov(X|Z, Y|Z)] + Cov[E(X|Z), E(Y|Z)]$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ:

$$\left.\begin{aligned} E[Cov(X,Y)|Z] &= E\{\overset{E(XY)}{\uparrow}E(X\cdot Y|Z)\} - E\{E(X|Z)E(Y|Z)\} \\ Cov[E(X|Z), E(Y|Z)] &= E[E(X|Z)E(Y|Z)] - \underset{EX}{\underset{\uparrow}{E[E(X|Z)]}}\,\underset{EY}{\underset{\uparrow}{E[E(Y|Z)]}} \end{aligned}\right\} =$$

$E(XY) - (EX)(EY) = Cov(X,Y).$

ΠΡΟΤΑΣΗ 4: $E[g(X)h(X,Y)|X=x] = g(x)E[h(X,Y)|X]$

$\{\psi(x) = E(Y|X=x) = \mu_{Y|X=x}\}$

$\{$

Ροπογεννήτριες συναρτήσεις

(X_1, X_2) τ.μ. , τότε η ροπογεννήτρια συνάρτηση,

$m_{X_1,X_2}(t_1,t_2) = E(e^{t_1X_1+t_2X_2})$

1) $m_{a_1X_1+b_1,a_2X_2+b_2}(t_1,t_2) = E\left(e^{(a_1X_1+b_1)t_1+(a_2X_2+b_2)t_2}\right) = e^{b_1t_1+b_2t_2}\, m_{X_1,X_2}(a_1t_1,a_2t_2)$.

2) $E[X_1^{k_1} X_2^{k_2}] = \dfrac{\partial^{k_1+k_2}}{\partial t_1^{k_1}\partial t_2^{k_2}} m_{X_1,X_2}(0,0)$

3) αν $m_{X_1,X_2}(t_1,t_2) = m_{Y_1,Y_2}(t_1,t_2) \longleftrightarrow f_{X_1,X_2}(x_1,x_2) = f_{Y_1,Y_2}(y_1,y_2)$

4) $m_{X_1}(t) = m_{X_1,X_2}(t,0)$.

1) Ροπογεννήτρια της $M(n,p_1,\dots,p_{k-1})$: $m_{\underset{\sim}{X}}(t_1,\dots,t_{k-1}) = (p_1e^{t_1}+\dots+p_{k-1}e^{t_{k-1}}+p_k)^n$

2) Ροπογεννήτρια της διδιάστατης κατανομής: $m_{X_1,X_2}(t_1,t_2) = e^{\mu_1t_1+\mu_2t_2+\frac{1}{2}(\sigma_1^2t_1^2+\sigma_2^2t_2^2+2\rho\sigma_1\sigma_2t_1t_2)}$

3) Ροπογεννήτρια της κ-διάστατης κατανομής: $m_{\underset{\sim}{X}}(\underset{\sim}{t}) : e^{\underset{\sim}{\mu}'\underset{\sim}{t}+\frac{1}{2}t'\Sigma t}$

Σχέσεις:

- $U = \sum_{i=1}^{n} a_iX_i$, a_i σταθ. X_i τ.μ.
- $V = \sum_{j=1}^{m} b_jY_j$, b_j σταθ. Y_j τ.μ.
- $E(U) = \sum_{i=1}^{n} a_iE(X_i)$
- $Var(U) = \sum_{i=1}^{n} a_i^2 Var X_i + 2\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} a_ia_j Cov(X_i,X_j)$
- $Cov(U,V) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} a_ib_j\, Cov(X_i,Y_j)$.